***Notions de logique***

1. ***Proposition – fonction propositionnelle***
2. ***Proposition***

***Activité***

1. Cocher la case convenable :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***Enoncé*** | ***Vrai*** | ***Faux*** |
| Tout nombre pair est divisible par 4 |  |  |
| La somme de deux nombres pairs est un nombre pair |  |  |
| La fonction  est une fonction paire |  |  |
| Le nombre 214 est un multiple de 3 |  |  |

1. Y a-t-il des énoncés sont varis et faux au même temps.

* ***Définition***

On appelle ***proposition***, tout énoncé mathématique dont on peut dire sans ambiguïté qu’il est vrai ou faux, et se note souvent P,Q,R,.....

***Remarque***

 L’adjectif « vrai » ou « faux » qui accompagne la proposition s’appelle « ***valeur de vérité »***

 Si P est une proposition vraie, on dit alors que la valeur de vérité de P est « Vrai » et se note « V » et Si P est une proposition fausse, on dit alors que la valeur de vérité de P est « faux » et se note « F ».

Table de vérité

|  |  |
| --- | --- |
| P | |
| V | F |

|  |  |
| --- | --- |
| P | |
| 1 | 0 |

Ou

***Exemples***

 :  ;   -1 est une solution de l’équation  

* ***Opérations sur les propositions***
* ***Négation d’une proposition***

Etant donné une proposition  .

***La négation*** de la proposition , est la proposition qui a une valeur de vérité « faux » si la proposition  est vraie, et une valeur de vérité « vrai » si la proposition  est fausse est se note  ou .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| ***V*** | ***F*** |
| ***F*** | ***V*** |

***Table de vérité***

***Remarque***

|  |  |
| --- | --- |
| ***Symbole*** | ***Négation*** |
| ***=*** |  |
| ***<*** |  |
| ***>*** |  |
|  | ***>*** |
|  | ***<*** |
|  |  |

***Application➀***

Donner la négation des propositions suivantes, en précisant la valeur de vérité :

  ;   ;  

* ***Conjonction de deux propositions***

***La conjonction*** de deux proposition P et Q est la proposition qui est vrai uniquement si les deux propositions Pet Q sont vraies en même temps et se note (P et Q) ou ().

***Table de vérité***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q |  |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

***Application➁***

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

 ***et***  .

 5 divise 35 ***et*** 5 est un nombre premier

 Le nombre  ***et***  .

 12 est un nombre impair ***et***  .

* ***Disjonction de deux propositions***

***La disjonction*** de deux proposition P et Q est la proposition qui une valeur de vérité « vrai » si au moins l’un des deux propositions est vraie on la note (P ou Q) ou  .

***Table de vérité***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q |  |
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

***Application ➂***

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

 ***ou***  .

 ***ou*** 5 est un nombre pair .

 ***ou***  .

* ***Implication de deux propositions***

***L’implication*** de deux proposition P et Q est la proposition qui une valeur de vérité « faux » si la proposition  est vraie et la proposition  est fausse et on la note .

 : se lit  implique Q ou bien « si P alors Q ».

***Table de vérité***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q |  |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

***Application➃***

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

 ;  3 est un nombre paire .

 ;  37 est un nombre premier .

***Remarque***

* L’implication  s’appelle l’implication réciproque de .
*  et  n’ont pas nécessairement même valeur de vérité.

***Exemple***

*  4 est un nombre pair ;  .

La proposition  est fausse mais la proposition  est vraie.

*  ;  36 divise 8.

La proposition est vraie et aussi la proposition  est vraie.

* ***Equivalence de deux propositions***

***L’équivalence*** de deux proposition P et Q est la proposition qui une valeur de vérité « vrai » si P et Q ont même valeur de vérité on la note .

 : se lit  équivalente la proposition  .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q |  |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

***Table de vérité***

***Application➄***

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

 ABC un triangle rectangle en A  .

 .

 est un nombre paire .

 est un multiple de 5.

* ***Lois de Morgan***

Soit et  trois propositions on a



1. ***Fonction propositionnelle***

***Activité***

On considère l’expression suivante :

1. L’expression précédente s’agit-il d’une proposition ?
2. Donner la valeur de vérité de l’expression précédente si  et si 

***Définition***

On appelle ***fonction*** ***propositionnelle***, tout énoncé mathématique contient une ou plusieurs variables appartenant à un ensemble bien définie, et qui est susceptible d’être une proposition si on attribue à ses variables certaines valeurs particulier dans l’ensemble et se note 

***Exemple***

  est une fonction propositionnelle

 est vraie et  est fausse.

  est une fonction propositionnelle

 est vraie et  est fausse.

1. ***Quantificateurs***

***Activité***

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes

 Il existe au moins un nombre réel  tel que 

 Pour tout  on a 

##### Pour tout on a

##### *Définition*

##### Soit une fonction propositionnelle telle que est un ensemble bien défini.

 La proposition **** est une proposition vraie lorsque on trouve au moins un  dans  pour lequel  est vraie.

On dit dans ce cas « il existe un  appartenant à  tel que  soit vraie »

Le symbole  s’appelle ***le quantificateur existentiel.***

 La proposition **** est une proposition vraie lorsque les propositions  soient vraies pour tout  dans .

On dit dans ce cas « pour tout  appartenant à , soit vraie »

Le symbole  s’appelle ***le quantificateur universel.***

***En particulier :***S’il existe un seul élément  dans  vérifier  , alors dans ce cas on écrit .

Le symbole  s’appelle ***quantificateur d’existence et d’unicité***.

##### *Exemple*

##### On considère la fonction propositionnelle suivante :

##### 

##### 

##### *Question* : donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

##### ;

##### *Remarque* :

* L'ordre des quantificateurs de même nature n'a aucune importance pour déterminer le sens du terme quantifié.
* L'ordre des quantificateurs de nature différents est important pour déterminer le sens du terme quantifié.
* ***Négation d’une proposition quantifiée***

***Propriété***

Soit  une fonction propositionnelle

 La négation de la proposition  est la proposition .

 La négation de la proposition  est la proposition .

***Exemple***

* La négation de la proposition  est la proposition .
* La négation de la proposition  est la proposition .

***Application➅***

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes, puis donner leur négation.

##### ;   ; .

##### ;  ; .

##### *Raisonnements mathématiques*

##### *Raisonnement par la contraposition*

##### *Définition*

##### Etant donné deux propositions et

##### Pour montrer que la proposition est vraie, il suffit de montrer que est vraie.

##### Ce raisonnement est basé sur la loi logique suivant

***Exemple***

Montrer que  ; 

Pour montrer  ;  il suffit de montrer que

 ;

On a 

Donc d’après le raisonnement par le contraposé on a  ; .

***Application➆***

En utilisant le raisonnement par le contraposé montrer que 

*  ; 
*  ou  

1. ***Raisonnement par équivalences successives***

***Propriété***

Soient  et  trois propositions

Raisonnement par l’équivalence est basé sur la loi logique suivant :

« Si  et  alors  » .

***Exemple***

Soit  ; montrer que 

On a 

***Application➇***

1. Soit  montrer que

* 
* 

1. Soient  et  deux nombres réels tels  et  montrer que

 et 

1. ***Raisonnement par disjonction des cas***

***Propriété***

Etant donné deux propositions  et 

Il faut que les deux propositions et  soient vraies.

***Exemple***

Résoudre dans  l’équation suivante : 

***Premier cas*** : si  alors 

Donc l’équation  devient 

c.-à-d.  par conséquent 

***Deuxième cas*** : si  alors 

Donc l’équation  devient 

c.-à-d.  par conséquent 

D’où 

***Application➈***

1. Montrer  ;  est un nombre pair.
2. Résoudre dans  l’équation suivante : 
3. Résoudre dans  l’inéquation suivante 
4. ***Résonnement par contre-exemple***

***Exemple***

Montrer que  est fausse

Si  alors  ce qui est impossible par conséquent  est fausse.

***Application➉***

Montrer que les propositions suivantes sont fausses

*  le nombre  est un nombre impair
*  le nombre  est un nombre premier.

1. ***Raisonnement par l’absurde***

***Activité***

Soient  et  deux propositions telles que  et  est une proposition vraie

Si  est fausse, que peut-on dire pour la valeur de vérité de .

***Règle***

Soit  une proposition. Pour montrer que la proposition  est vraie, on suppose que est fausse puis trouver la contradiction avec les données d’exercices et le prérequis.

***Exemple***

Montrer 

On suppose que  alors 

On a 

On a 

Donc l’équation n’a pas de solutions ; donc il y a une contradiction

Par conséquent .

***Application➀➀***

1. Montrer que  ; 
2.  un triangle de côtés  et . Montrer que le triangle  n’est pas rectangle en  .
3. Soient  tels que  et .

Montrer que  ,  et 

1. ***Résonnement par récurrence***

***Propriété***

Soit  une fonction propositionnelle et  tel que 

Pour montrer que  est vraie, on suit les étapes suivantes :

 Vérifier que  est vraie



 Supposer que est vraie.

 Montrer que est vraie

 Conclure que  est vraie

 D’après le principe de récurrence on a .

***Remarque***

En utilisant le principe de récurrence si  est un nombre entier naturel.

***Exemple***

Montrer que 

Pour  on a  est une proposition vraie

 :

Supposons que  est vraie

Montrer  c.-à-d.  est aussi vraie

On a 

Or on a  ;

Alors  ; 

Donc d’après le principe de récurrence on a .

***Application➀➁***

Soit . Montrer que

* 
* 
* Le nombre  est un multiple de 3.